5 Prodotti notevoli

Alcune moltiplicazioni di polinomi e alcune potenze sono molto frequenti negli esercizi e si possono ottenere i risultati senza effettuare i calcoli, ma applicando delle regole pratiche. Per questo motivo prendono il nome di prodotti notevoli.

Quadrato di un binomio

La regola per calcolare il quadrato di un binomio (cioè per elevare alla seconda un binomio) è riassunta nel seguente esempio:

$$(a \pm b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{quadrato}\\ 1^\circ \text{ termine}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{quadrato}\\ 2^\circ \text{ termine}}} \pm \underbrace{2ab}_{\text{doppio prodotto } 1^\circ \text{ termine} \times 2^\circ \text{ termine}}$$

Nell'applicazione della regola occorre osservare che i due quadrati sono sempre positivi, mentre il segno del doppio prodotto dipende dal segno dei due monomi.

Per esempio

$$(2a + b)^2 = 4a^2 + b^2 + 2 \cdot (2a) \cdot (b) = 4a^2 + b^2 + 4ab$$

$$(a - 3b)^2 = a^2 + 9b^2 + 2 \cdot (a) \cdot (-3b) = a^2 + 9b^2 - 6ab$$

Esercizi da svolgere

1 $(3a + 1)^2 =$ ....

2 $(2x + 3)^2 =$ ....

3 $(x - ab)^2 =$ ....

4 $(5x^2 - 1)^2 =$ ....

5 $(3 - 2a^2)^2 =$ ....

6 $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 =$ ....

7 $\left(\frac{2}{3}a - 1\right)^2 =$ ....

8 $\left(3x^2 - \frac{1}{2}y\right)^2 =$ ....

Quadrato di un trinomio

La regola per calcolare il quadrato di un trinomio (cioè per elevare alla seconda un trinomio) è riassunta nel seguente esempio:

$$(\boldsymbol{a+b+c})^2 = \underbrace{\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}}_{\text{quadrati dei tre termini}} + \underbrace{\boldsymbol{2ab}}_{\text{doppio prodotto 1° t.} \times \text{2° t.}} + \underbrace{\boldsymbol{2ac}}_{\text{doppio prodotto 1° t.} \times \text{3° t.}} + \underbrace{\boldsymbol{2bc}}_{\text{doppio prodotto 2° t.} \times \text{3° t.}}$$

I tre quadrati sono sempre positivi, mentre i segni dei tre doppi prodotti dipendono dai segni dei termini del trinomio.

Per esempio

$$(\boldsymbol{2a+b-1})^2 = (2a)^2 + (b)^2 + (-1)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(b) + 2\cdot(2a)\cdot(-1) + 2\cdot(b)\cdot(-1) =$$
$$= 4a^2 + b^2 + 1 + 4ab - 4a - 2b$$

Esercizi da svolgere

1 $(a-b+3)^2 =$ ....

2 $(x+y-1)^2 =$ ....

3 $(3a+b+2)^2 =$ ....

4 $\left(\frac{1}{2}a+b+1\right)^2 =$ ....

5 $(ax+by+1)^2 =$ ....

Cubo di un binomio

La regola per calcolare il cubo di un binomio (cioè per elevare alla terza un binomio) è riassunta nel seguente esempio:

$$(\boldsymbol{a+b})^3 = \underbrace{\boldsymbol{a^3}}_{\text{cubo del 1° t.}} + \underbrace{\boldsymbol{3a^2b}}_{\text{triplo prodotto del quadrato del 1° t. per il 2° t.}} + \underbrace{\boldsymbol{3ab^2}}_{\text{triplo prodotto del 1° t. per il quadrato del 2° t.}} + \underbrace{\boldsymbol{b^3}}_{\text{cubo del 2° t.}}$$

Il segno di ciascuno dei termini dello sviluppo dipende dal segno dei termini del trinomio.

Per esempio

$$(\boldsymbol{a-2b})^3 = a^3 + 3a^2\cdot(-2b) + 3a\cdot(-2b)^2 + (-2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$$

Esercizi da svolgere

1. $(a+2b)^3 =$ ....

2. $(2x-1)^3 =$ ....

3. $(ab+2)^3 =$ ....

4. $(2a+5b)^3 =$ ....

Somma di due termini moltiplicata per la loro differenza

Il prodotto è uguale alla differenza dei quadrati dei due termini:

$$\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)} = \underbrace{\mathbf{a^2}}_{\text{quadrato 1° t.}} - \underbrace{\mathbf{b^2}}_{\text{quadrato 2° t.}}$$

Per esempio

$$\mathbf{(x+5y)\cdot(x-5y)} = (x)^2-(5y)^2 = x^2-25y^2$$

$$(\underbrace{\mathbf{x+y}}_{\text{1° termine}} + \underbrace{\mathbf{a}}_{\text{2° termine}})\cdot\mathbf{(x+y-a)} = \underbrace{(x+y)^2}_{\text{quadrato 1° t.}} - \underbrace{a^2}_{\text{quadrato 2° t.}} = x^2+2xy+y^2-a^2$$

Esercizi da svolgere

1. $(a-3x)\cdot(a+3x) =$ ....

2. $(5-ab)\cdot(5+ab) =$ ....

3. $\left(\frac{1}{2}x+4\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x-4\right) =$ ....

4. $(x^2-1)\cdot(x^2+1) =$ ....

5. $(a+b+2)\cdot(a+b-2) =$ ....

6. $(2x-y-3)\cdot(2x-y+3) =$ ....

6 Divisione di un polinomio per un monomio

Possono verificarsi due casi.

1) Se tutti i termini del polinomio contengono le lettere della parte letterale del monomio, con esponente uguale o maggiore, il quoziente si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.

Per esempio

$$(\mathbf{3a^2 + 5ab - 7a^3x}) : \mathbf{3a} = 3a^2 : 3a + 5ab : 3a - 7a^3x : 3a = a + \frac{5}{3}b - \frac{7}{3}a^2x$$

2) In tutti gli altri casi si può solo scrivere la divisione sotto forma di frazione.

Per esempio

$$(\mathbf{5a + 8a^3b + a^2bx}) : \mathbf{axy} = \frac{5a + 8a^3b + a^2bx}{axy}$$

Esercizi da svolgere

1 $(8x^2 + 7ab + 4a^3b^2) : a =$ ....

2 $(16a^2b - 8ab^2 - 14a^3b^3) : (-2ab) =$ ....

....

3 $(x^4y + 2x^3y^3 - 6ax^3y) : (-5x^2y) =$ ....

....

4 $\left(-\frac{3}{4}x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{2}{3}abx^2\right) : \frac{3}{2}a =$ ....

....

5 $\left(\frac{2}{3}ab^2x^2 - \frac{5}{4}ab^2 + 7ab^3y\right) : \frac{3}{4}ab^2 =$ ....

....

6 $(6x + 3ax^2 - 2a^3 + 1) : 3a^2b =$ ....

7 $(a^4bx - 6abx + ab - ax) : abx =$ ....

7 Divisione di due polinomi

Sia $A(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7$ il polinomio dividendo

e sia $B(x) = x^2 - x + 1$ il polinomio divisore

Per trovare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione, si segue questo procedimento:

1) si dispongono $A(x)$ e $B(x)$ ordinati secondo le potenze decrescenti di x:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2) si divide il primo termine $2x^3$ di $A(x)$ per il primo termine x^2 di $B(x)$, ottenendo il primo termine del quoziente $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array} \qquad (2x^3 : x^2 = 2x)$$

3) si moltiplica $2x$ per $B(x)$ e si scrive sotto A (x) il prodotto *cambiato di segno*, sommando in colonna i termini simili:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 - 2x \quad & 2x \\ \hline // \quad 5x^2 - 6x + 7 & \end{array}$$

4) si divide il primo termine $5x^2$ del nuovo dividendo per il primo termine x^2 di $B(x)$ ottenendo 5, che è il secondo termine del quoziente $Q(x)$, che si scrive accanto a $2x$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 - 2x \quad & 2x + 5 \\ \hline // \quad 5x^2 - 6x + 7 & \end{array} \qquad (5x^2 : x^2 = 5)$$

5) si procede come prima, si moltiplica 5 per il divisore $B(x)$ e si scrive il prodotto, cambiato di segno, in colonna, sommando poi i termini simili:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 - 2x \quad & 2x + 5 \qquad \leftarrow Q(x) \\ \hline // \quad 5x^2 - 6x + 7 & \\ -5x^2 + 5x - 5 & \\ \hline // \quad - \quad x + 2 & \qquad \leftarrow R(x) \end{array}$$

A questo punto la divisione non può procedere oltre, *perché il grado del resto* $(-x + 2)$ *è inferiore al grado del divisore*.

Il risultato della divisione è perciò il seguente:

$$\text{Quoziente} = Q(x) = 2x + 5$$

$$\text{Resto} = R(x) = -x + 2$$

Verifica: moltiplicando il quoziente $Q(x)$ per il divisore $B(x)$ e aggiungendo il resto $R(x)$ si deve ottenere il dividendo $A(x)$:

$$Q(x) \cdot B(x) + R(x) = A(x)$$

Infatti:

$$\underbrace{(2x+5)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x^2-x+1)}_{B(x)} + \underbrace{(-x+2)}_{R(x)} = 2x^3-2x^2+2x+5x^2-5x+5-x+2 = 2x^3+3x^2-4x+7$$

Esercizi guidati

1

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +8x^2 & -6x & +3 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6} -2x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 \\ \cline{1-5} // & -3x^3 & +6x^2 & -6x & +3 & \\ \cline{2-5} & & & & & \\ \cline{2-5} & // & // & // & & \end{array}$$

$Q(x) =$ ....

$R(x) = 0$

(divisione esatta)

Verifica: ....

....

2

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 4x^5 & & -17x^3 & -14x^2 & & +4 & 2x^2-3x-4 \\ \cline{7-7} -4x^5 & +6x^4 & +8x^3 & & & & 2x^3 \\ \cline{1-6} \end{array}$$

$Q(x) =$ ....

$R(x) =$ ....

Verifica: ....

....

3

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +11x & -10 & x^2-2 \\ \cline{5-5} & & & & x^2 \end{array}$$

$Q(x) =$ ....

$R(x) =$ ....

Verifica: ....

....

8 Regola di Ruffini

La regola di Ruffini si può usare nei casi in cui il polinomio divisore è un binomio di 1° grado, cioè del tipo $x \pm k$.

Per eseguire, per esempio, la divisione

$$(3x^2 + 5x - 7) : (x + 3)$$

si segue questo procedimento:

1) si dispongono nella 1ª riga dello schema i coefficienti del dividendo, separando il termine noto:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 5 & -7 \\ \hline & & & \end{array} \quad \leftarrow \text{coefficienti del dividendo}$$

2) si colloca in basso a sinistra il termine noto del divisore, *cambiato di segno*:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 5 & -7 \\ \mathbf{-3} & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

3) si abbassa il 1° coefficiente:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 5 & -7 \\ -3 & \downarrow & & \\ \hline & \mathbf{3} & & \end{array}$$

4) si moltiplica -3 per 3 e si pone il risultato in colonna:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 5 & -7 \\ -3 & & \mathbf{-9} & \\ \hline & 3 & & \end{array}$$

5) si somma in colonna, ottenendo -4:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 5 & -7 \\ -3 & & -9 & \\ \hline & 3 & \mathbf{-4} & \end{array}$$

6) si moltiplica -3 per -4, si pone il risultato in colonna e si somma, ottenendo 5:

	3	5	-7
-3		-9	12
	3	-4	**5**

Questo è l'aspetto finale dello schema, in cui sono evidenziati i risultati della divisione:

	3	5	-7
-3		-9	12
	3	**-4**	**5**

coefficienti del quoziente $Q(x)$ resto R

Il quoziente $Q(x)$ è di un grado inferiore rispetto al dividendo: quindi il risultato della divisione è

$$Q(x) = 3x - 4 \qquad R = 5$$

Verifica: $(3x-4) \cdot (x+3) + 5 = 3x^2 + 9x - 4x - 12 + 5 = 3x^2 + 5x - 7$

Esercizi guidati

1 $(5x^3 - 2x^2 + 7x + 2) : (x + 2)$

	5	-2	7	2
-2		-10		
	5	-12		

$Q(x) =$ ....

$R =$ ....

Verifica: ....

2 $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) : (x - 3)$

	1	-2	3	-5	1
3					

$Q(x) =$ ....

$R =$ ....

Verifica: ....

3 $(2x^4 - 5a^3 - 3a + 2) : (a - 1)$

Questo è un caso particolare, perché *nel dividendo manca la potenza* a^2; nello schema di Ruffini occorre perciò mettere 0 al posto del suo coefficiente.

	2	−5	0	−3	2
1					

$Q(x) =$ ....

$R =$ ....

Verifica: ....

4 $(7x^4 - 4x^2 + 2x - 12) : (x - 1)$

1		

$Q(x) =$ ....

$R =$ ....

Verifica: ....

5 $(2x^3 + 3x^2 - 7x + 4) : (2x - 3)$

Questo è un caso particolare, perché *il divisore non è del tipo* $x \pm k$, *ma c'è il coefficiente* 2 *davanti alla* x: per ricondurre la divisione ai casi precedenti occorre dividere per 2 tutti i termini del polinomio dividendo e del polinomio divisore (proprietà invariantiva della divisione).

Si ottiene pertanto la divisione equivalente:

$$\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2\right) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

che si esegue con il solito schema (i coefficienti sono frazioni):

	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	2
$\frac{3}{2}$				
	1			

$Q(x) =$ .... $R =$ ....